22.05.2014

Q2 Zahlenbeispiel: $n = 3$ Reparaturrate $\mu := 5$ (pro Monat), Ausfallrate $\lambda := 1$ (pro Monat) eines einzelnen Komponent

(mit Zuverlässigkeit $R_i(t) := e^{-\lambda t}$ für $i = 1, 2, 3$)

$$\Rightarrow R(t) = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1^2 + 2\cdot 5\cdot 1\cdot 5 + 5^2}}_{= \lambda^2 + 2(2n-1)\lambda\mu + \mu^2 \quad d = 76}} \cdot \left(\frac{-5\cdot 1 - 5 - \sqrt{76}}{2} \cdot e^{(-10+\sqrt{76})t/2} - \frac{10+\sqrt{76}}{2} e^{(-10-\sqrt{76})t/2} \right)$$

für t (pro Monat) $\Rightarrow R(6) = \frac{1}{\sqrt{76}} \left(\frac{-10-\sqrt{76}}{2} e^{3(-10+\sqrt{76})} - \frac{-10+\sqrt{76}}{2} e^{3\cdot(-10-\sqrt{76})} \right)$

$R(t) = 0{,}023$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses System nach 6 Monaten noch intakt ist.

05.06.2014 **Def.:** $A(t)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ausgehend von einem definierten Startzustand das System zur Zeit $t \geq 0$ intakt ist. Die Fkt. A heißt Verfügbarkeit.

Bem.: a) Für ein Reparatur-System mit absorbierenden Systemausfall gilt $\boxed{A = R}$

→ 1 - da Gegenereignis zu nicht intakt

b) Im Allgemeinen gilt in einem Reparatursystem $\boxed{A = 1 - \pi_N}$ mit $\pi_N = \pi_N(t)$ als Aufenthaltswahrscheinlichkeit

→ ! Start bei Index 1 !

im Zustand N des Systemausfall

c) Um R für ein Reparatur-System mit absorbierenden Systemausfall zu bestimmen, kann nach a) und b) die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $\vec{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_N) = \vec{\pi}_0 \cdot \overset{\text{Übergangsmatrix}}{P}$ mit Startverteilung $\vec{\pi}_0 := \overset{\text{alle Komponenten intakt}}{(1, 0, \dots, 0)}$ und $P = P(t)$ als Übergangsmatrix

Def.: Die Fkt. $\lambda(t) := -\frac{R'(t)}{R(t)}$ (mit R als Zuverlässigkeit) heißt Ausfallrate.

Bem.: a) Die Ausfallrate ist genau dann konstant, wenn $R(t) = e^{-\lambda t}$ (→ Exponentialverteilung!) gilt.

$$\Rightarrow -\frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{+\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$$

3.43. im WS-Skript b) Bei Erlang-Verteilung der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ gilt $R(t) = e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$ also $R'(t) = -\lambda e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!} + e^{-\lambda t} \lambda \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}$

$$\Rightarrow R'(t) = \lambda e^{-\lambda t} \left(\sum_{j=0}^{k-2} \frac{(\lambda t)^j}{j!} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \right)$$

$$\boxed{R'(t) = -\lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}}$$

17 $\Rightarrow \boxed{\lambda(t) = \frac{\lambda (\lambda t)^{k-1}}{(k-1)! \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}}}$ Spezialfall $k = 1 \rightarrow \lambda(t) = \lambda$ (Exponentialverteilung)

c) Für kleine $\Delta t > 0$ ist $\lambda(t) \cdot \Delta t$ ungefähr die W.keit für den Ausfall (des Systems) im Zeitintervall $[t, \Delta t + t]$

Bsp.: Ausfallrate $\lambda = \lambda(t)$ eines 2-von-3-Systems ohne Reparatur mit konstanter Ausfallrate $\lambda > 0$ für die einzelnen Komponenten.

23 Allg. Formel für $(n-1)$ von n-(Reparatur)-Systems aus 4.5.2: $\lambda(t) = n(n-1)\lambda^2 \cdot \frac{e^{v_1 t} - e^{v_2 t}}{v_1 e^{v_2 t} - v_2 e^{v_1 t}}$

mit $v_{1,2} := \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{\lambda^2 + 2(2n-1)\lambda\mu + \mu^2} - (2n-1)\lambda - \mu\right)$

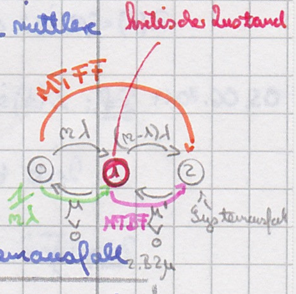
bei uns $\mu = 0$ und $n = 3$ $\Rightarrow v_{1,2} = \frac{1}{2}(\pm\lambda - 5\lambda)$ $\Rightarrow$ ~~$\lambda(t)$~~ $v_1 = -2\lambda$ & $v_2 = -3\lambda$

$$\Rightarrow \lambda(t) = 6\lambda^2 \frac{e^{-2\lambda t} - e^{-3\lambda t}}{-2\lambda e^{-2\lambda t} + 3\lambda e^{-3\lambda t}} = 6\lambda^2 \frac{e^{-2\lambda t} - e^{-3\lambda t}}{3\lambda e^{-2\lambda t} - 2\lambda e^{-3\lambda t}} > 0$$

$$= 6\lambda \frac{1 - e^{-\lambda t}}{3 - 2e^{-\lambda t}}$$ also $\lambda(0) = 0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Ausfallrate 0

$\to$ verschwindene Ausfallrate am Anfang!

23 **Zusammenhang zwischen MTFF und MTBF:** MTFF (Zeit bis zum Ausfall des absorbierenden Systems) $= \int_0^\infty t\,(f(t))\,dt$ (Dichtefkt) ist die mittlere Lebenserwartung (z.B. eines Systems mit absorbierenden Systemausfalls)



$(n-1)$ von n Reperatursystem mit nicht-absorbierenden Systemausfall

MTBF := mittlerer Ausfallabstand d.h. die Zeit zwischen Reperatur am Systemausfall bis zum nächsten Systemausfall (also unabhängig von μ) $\Rightarrow$ $\boxed{\text{MTBF} = \text{MTFF} - \frac{1}{n\lambda}}$